INTEGRALES DE CAMPOS ESCALARES

1. Integrales múltiples

1.1 Definiciones previas:

- Sea $T \subseteq \Re^n$ se dice que T es medible y su medida vale $\mu(T)$, si a T se le puede asignar un volumen el cual será su medida.
  En caso de trabajar con $T \subseteq \Re^2$ su medida es el área.
- Sea $T \subseteq \Re^n$ y sea P una familia de conjuntos $T_i \subseteq T$. P es una partición de T y se indica $P = \left\{ T_i \right\}_{i=1}^{n}$ sí y sólo sí:

  a) $\bigcup\limits_{i=1}^{n} T_i = T$ b) $T_i \cap T_j = \varnothing \;\; \forall i \neq j$
- Sea $T \subseteq \Re^n$ medible y $P = \left\{ T_i \right\}_{i=1}^{n}$ una partición de T.
  P es medible de T si y sólo si T_i es medible $\forall i = 1,\dots,n$.
- Sea $P = \left\{ T_i \right\}_{i=1}^{n}$ una partición medible de T. Se denomina diámetro de un conjunto T_i, y se simboliza $\delta(T_i)$ a: $\delta(T_i) = Supremo \left\{ d(P,Q) / \; P \wedge Q \in T_i \right\}$
- Se denomina norma de la partición y se simboliza $\|P\|$ a:

$$\|P\| = \max_{1 \le i \le n} \left\{ \delta(T_i) \right\}$$

- Sea $f : T \to \Re / T \subseteq \Re^n$ un campo escalar definido y acotado (*) en $T \subseteq \Re^n$ medible.
  (*) $(\exists M / \left| f(\bar{r}) \right| < M \;\; \forall \bar{r} \in T)$
- Sea $P = \left\{ T_i \right\}_{i=1}^{n}$ una partición medible de T y $\bar{r}_i \in T_i$. Se denomina suma integral de f sobre T a: $s(f,P) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i) \cdot \mu(T_i)$ (esta suma integral también depende de la partición)

1.2 Integral múltiple de f sobre T:

Se denomina integral múltiple de f sobre T, al número, si existe:

$$I = \int_T f \, d\mu = \lim_{\|P\| \to 0} s(f,P) = \lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i) \cdot \mu(T_i)$$

- Si $T \subseteq \Re$ entonces $I = \int_T f \, d\mu = \int_T f(x) \, dx$ (integral simple)
- Si $T \subseteq \Re^2$ entonces $I = \int_T f \, d\mu = \iint_T f(x,y) \, dx \, dy$ (integral doble)

- Si $T \subseteq \Re^3$ entonces $I = \int_T f\, d\mu = \iiint_T f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz$ (integral triple)

Si existe este límite, se dice que f es integrable sobre T

1.3 Condición suficiente de integrabilidad:

Sea f un campo escalar definido, acotado y continuo en T medible. Entonces f es integrable en T

1.4 Propiedades:

Sean f y g integrables sobre T y $\alpha, \beta \in \Re$ entonces se verifican las siguientes propiedades:

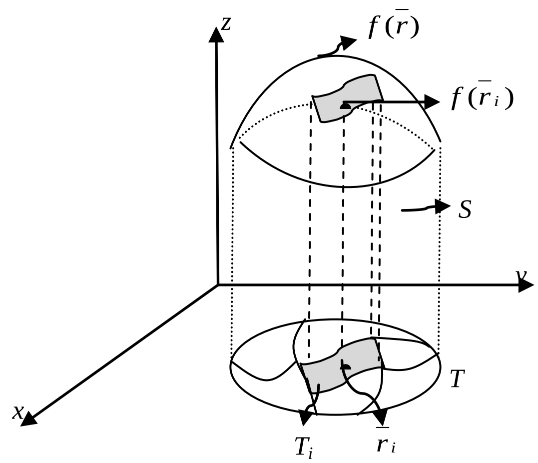
i) $\alpha f + \beta g$ integrable en T y $\int_T (\alpha f + \beta g)\, d\mu = \alpha \int_T f\, d\mu + \beta \int_T g\, d\mu$ (Linealidad)

ii) Si $T = T_1 \cup T_2$ tal que $\mu(T_1 \cap T_2) = 0$ entonces $\int_T f\, d\mu = \int_{T_1} f\, d\mu + \int_{T_2} f\, d\mu$ (Aditividad del intervalo de integración)

iii) Si $f(\bar{r}) \le g(\bar{r})\ \ \forall \bar{r} \in T$ entonces $\int_T f(\bar{r})\, d\mu \le \int_T g(\bar{r})\, d\mu$

En particular si $f(\bar{r}) \ge 0\ \ \forall \bar{r} \in T \Rightarrow \int_T f(\bar{r})\, d\mu \ge 0$ (Propiedad de monotonía)

1.5 Interpretación geométrica de la integral doble:



Sea $f(\bar{r}) \ge 0\ \ \forall \bar{r} \in T \subseteq \Re^2 \wedge f$ integrable en T

$$\lim_{\|P\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\bar{r}_i) \cdot \mu(T_i) = \iint_T f(\bar{r}) \cdot d\mu$$

Si f es integrable en $T \wedge f(\bar{r}) \ge 0\ \forall \bar{r} \in T$ se cumple que $\iint_T f(\bar{r}) \cdot d\mu = V(S)$ siendo

$S = \{(x,y,z) \in \Re^3 / (x,y) \in T \wedge 0 \le z \le f(x,y)\}$

Bibliografía sugerida:

Integrales múltiples. RABUFFETTI, Hebe (1983): *Introducción al análisis matemático (Cálculo 2).* Pág. 196 - 198. *LARSON- HOSTETLER- EDWARD (1995): "Cálculo y Geometría analítica", tomo 2, quinta edición, autores, pág. 1210 - 1220.*

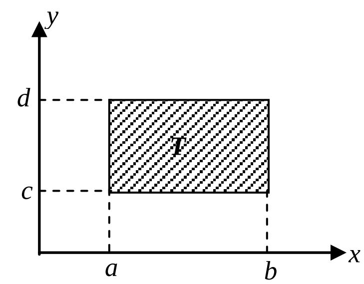
2. Integrales dobles:

2.1 Recintos de integración y cálculo:

Considerando los siguientes recintos de integración:

i) Sobre un rectángulo:
$T = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \,/\, a \le x \le b \wedge c \le y \le d \right\}$

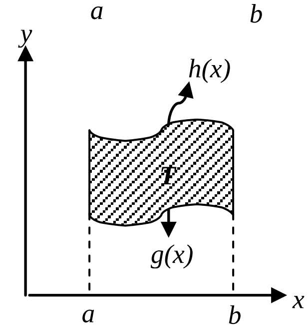
$$\iint_T f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\, dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\, dx \right] dy$$



ii) Sea $T = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \,/\, a \le x \le b \wedge g(x) \le y \le h(x) \right\}$

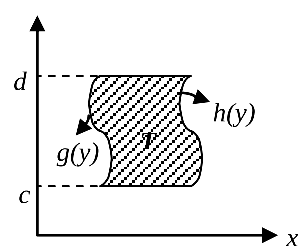
con g, h *continuas en* $[a, b]$

$$\iint_T f(x,y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)\, dy \right] dx$$



iii) Sea: $T = \left\{ (x, y) \in \Re^2 \,/\, g(y) \le x \le h(y) \wedge c \le y \le d \wedge g, h \text{ continuas en } [c, d] \right\}$

$$\iint_T f(x,y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{g(y)}^{h(y)} f(x,y)\, dx \right] dy$$



Actividades:

1. Determinar los límites de integración en la integral doble $\int_T f(x,y)\, dx\, dy$, para el recinto T tal que T es:
   i) un rectángulo cuyos vértices son: $(0,0); (2,0); (2,1); (0,1)$
   ii) un triángulo cuyos vértices son: $(0,0); (1,0); (1,1)$

2. Escribir las ecuaciones de las curvas que limitan los recintos a que se extienden las integrales dobles que se indican a continuación y dibujar estos recintos.

   a. $\int_{-1}^{2}\int_{2x^2-2}^{x^2+x} f(x,y)\,dy\,dx$ b. $\int_{2}^{3}\int_{x^2}^{x+6} f(x,y)\,dy\,dx$

3. Calcular las integrales siguientes:

   a. $\int_{1}^{2}\int_{0}^{y}(x^2y^2)\,dx\,dy$ b. $\int_{1}^{2}\int_{y}^{3y}(x+y)\,dx\,dy$

2.2 Aplicaciones de las integrales dobles:

Aplicaciones geométricas:

1. Cálculo de área de una superficie plana:
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = \text{área de } T \text{ si } f(x,y)=1 \quad \forall (x,y)\in T.$$
2. Cálculo del volumen:
$$\iint_T f(x,y)\,dx\,dy = V(T) \text{ si } f(x,y)\geq 0 \quad \forall (x,y)\in T.$$

Aplicaciones físicas:

- Masa de una lámina plana.
- Centro de gravedad o centro de masas de una lámina plana.
- Momento de inercia de una lámina plana *(denominado también momento segundo)*

Resolución Actividades propuestas en clase

1. Hallar el área encerrada por: $y^2 = 4x \quad 2x - y = 4$
2. Hallar el volumen encerrado por
   $z = x^2 + y^2, \quad z = 18 - x^2 - y^2, \quad x = 0, \quad y = 0, \quad x + y = 3$
3. Hallar la masa y el centro geométrico, del área plana homogénea limitada por las curvas de ecuación $y = 6x - x^2$ y $y = x$

Bibliografía sugerida:

Aplicaciones físicas *LARSON- HOSTETLER- EDWARD (1995): "Cálculo y Geometría analítica", tomo 2, quinta edición, autores, pág. 1240.*

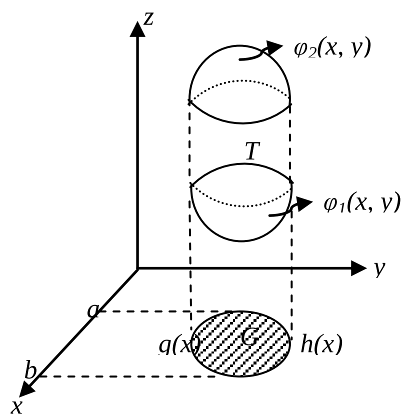
3. Integrales triples:

3.1 Recintos de integración y cálculo:

Sea $T = \left\{(x,y,z) \in \Re^3 / \varphi_1(x,y) \le z \le \varphi_2(x,y) \, con \; (x,y) \in G \wedge \varphi_1, \varphi_2 \; continuas \; en \; G\right\}$ tal que
$G = \left\{(x,y) \in \Re^2 / g(x) \le y \le h(x) \wedge a \le x \le b \; con \; g,h \; continuas \; en \; [a,b]\right\}$

$$\int_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iint_G \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\,dz\right] dx\,dy = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{h(x)} \left[\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} f(x,y,z)\,dz\right] dy\right] dx$$

3.2 Aplicaciones de las integrales triples:



Aplicaciones geométricas:

Cálculo del volumen

$$\iiint_T f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = volúmen \; de \; T$$

si $f(x,y,z) = 1 \;\; \forall (x,y,z) \in T \subset \Re^3$ teniendo en cuenta la gráfica dada.

Aplicaciones físicas:

- Masa de una región sólida:
- Centro de gravedad o centro de masas de una región sólida:
- Momento de inercia de una región sólida*:*

<u>Resolución Actividades propuestas en clase</u>

1. Calcular las siguientes integrales:

   a) $\int_0^1 \int_1^2 \int_2^3 (x+y+z)\,dz\,dx\,dy$ b) $\int_0^1 \int_0^{1-x} \int_0^{1-x+y} (x+1)\,dz\,dy\,dx$

2. Hallar el volumen del primer octante comprendido entre las superficies $z = x+1$, $x^2+y^2 = 4$, $z = \frac{1}{2}x$

Bibliografía sugerida:

Centro de masas y momentos de inercia: *LARSON- HOSTETLER- EDWARD (1995): "Cálculo y Geometría analítica", tomo 2, quinta edición, autores, pág. 1240.*